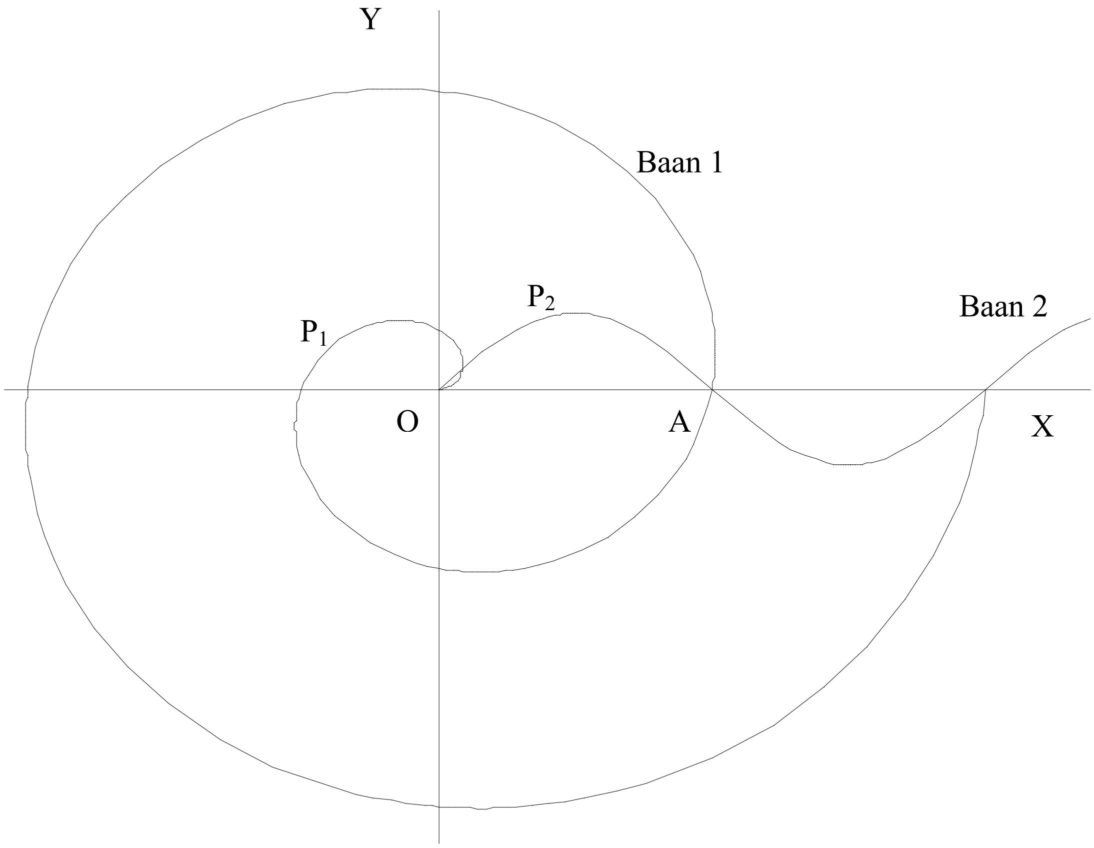
Examenvraag:



(schaal van de X-as is niet dezelfde als die van de Y-as)

Het punt $\mathbf{P_1}$ beweegt op baan 1:

$$\begin{cases} \mathbf{X = a\theta \cos\theta} \\ \mathbf{Y = a\theta \sin\theta} \end{cases}$$

met **a** een constante en $\boldsymbol{\theta}$ de hoek tussen de positieve X-as en de lijn $\mathbf{OP_1}$.

Het punt $\mathbf{P_2}$ beweegt op baan 2:

$$\{\mathbf{Y = \sin X}$$

In het punt **A** komen beide banen bij elkaar op de X-as.

Op tijdstip **t=0** bevinden beide punten zich in de oorsprong. De projectie van de snelheidsvector van het punt $\mathbf{P_1}$ op $\overline{\mathbf{OP_1}}$ is constant en gelijk aan $\mathbf{V_r}$, terwijl de modulus van de snelheid van punt $\mathbf{P_2}$ volgend verloop kent:

$$\mathbf{V_{P_2} = \sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

Bepaal:

1. **a** en $\mathbf{V_r}$ opdat beide punten op hetzelfde tijdstip in **A** aankomen.
2. de normaalcomponent van de versnelling van punt $\mathbf{P_2}$ in functie van **X**.

Oplossing:

Punt P1:

Radiale component van de snelheid is constant en gelijk aan V_r:

gebruik poolcoördinaten: $\bar{\mathbf{v}} = (\dot{r},\ r\dot{\theta})$ **met** $r = a\theta$

$$\Rightarrow \quad a\dot{\theta} = V_r$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{V_r}{a} t + \underbrace{\theta_0}_{=0}$$

Punt P2:

Modulus van de snelheid:

$$V = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + \cos^2 x}\,\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = t + \underbrace{x_0}_{=0}$$

Voorwaarden:

In A: $\theta = 2\pi$ **en** $x = \pi$

$$\Rightarrow \quad \pi = a2\pi\cos 2\pi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Samen aankomen in A:

$$t1_A = \frac{a2\pi}{V_r} \qquad t2_A = \pi$$

$$\Rightarrow \quad V_r = 2a = 1$$

Normaalcomponent van de versnelling van punt p2:

$$j_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad \text{en} \qquad \rho = \pm \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''}$$

$$\Rightarrow \qquad \rho = \pm \frac{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}{-\sin x}$$

$$\Rightarrow \qquad j_n = \mp \frac{(1 + \cos^2 x)}{\dfrac{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}} = \mp \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$